DM n°4
(Pour le vendredi 16 octobre 2020)

1 Révisions atomistiques MPSI

Données générales :

Constante des gaz parfaits : R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}
Constante d'Avogadro : N_A = 6,02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Planck : h = 6,63×10^{-34} J.s
Célérité de la lumière dans le vide : c = 3,0×10^{8} m.s^{-1}

1. L'élément oxygène possède le numéro atomique $Z = 8$. Indiquer sa configuration électronique dans son état fondamental, en énonçant précisément les règles utilisées.
2. Quel est son nombre d'électrons de valence ? Dans quelle colonne du tableau périodique est-il situé ? Dans quelle période ?

   L'électronégativité de O est assez élevée, ce qui lui donne un caractère oxydant relativement marqué. C'est pour cela que la plupart des éléments que l'on rencontre à l'état naturel se trouvent sous forme d'oxydes, comme le carbone C (Z = 6) dans la molécule CO_2 ou encore l'azote N (Z = 7) avec l'ion NO_3^-.

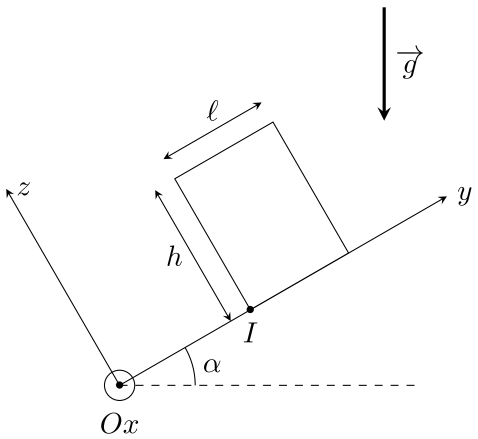
3. Donner en la justifiant la formule de Lewis de CO_2.
4. Dans l'ion NO_3^-, l'azote est l'atome central. Donner la formule de Lewis la plus stable de cet ion, c'est à dire celle qui contient le moins de charge formelles possibles.
5. Le plomb a un numéro atomique Z(Pb) = 82 et une masse molaire M(Pb) = 207,21 g.mol^{-1}.
   a) Justifier l'ordre de grandeur de la masse molaire du plomb par rapport à son numéro atomique.
   b) Le plomb possède 3 isotopes stables prépondérants ^{206}Pb, ^{207}Pb et ^{208}Pb. Sachant que l'abondance isotopique de ^{208}Pb vaut 52,4 %, en déduire celles des deux autres isotopes.
   c) Définir les énergies de première et de deuxième ionisation du plomb. Sachant que leurs valeurs respectives sont 715 kJ.mol^{-1} et 1450 kJ.mol^{-1}, si on soumet des atomes de plomb à un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 120$ nm, peut-on observer la première ionisation ? La deuxième ?

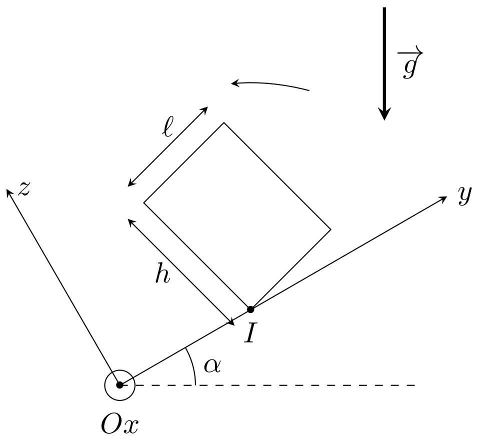
2 Glissement ou basculement d'un bloc

Un bloc de masse m, de longueur ℓ (égale à sa largeur) et de hauteur h repose sur un plan initialement horizontal. On note f_s le coefficient de frottement statique entre le bloc et le plan, la nature du contact se caractérisant par $f_s \in [0, 1]$.

Un opérateur augmente progressivement la valeur de l'angle α que fait le plan avec l'horizontale.

On modélise le basculement éventuel du bloc par un pivotement sans glissement autour de la génératrice de contact Ix passant par I. On note alors J le moment d'inertie du bloc par rapport à cet axe et $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{e_x}$ son vecteur rotation instantané autour de cet axe, où sa vitesse angulaire est telle que $\omega > 0$.





1. On ignore pour l'instant la possibilité de basculement du bloc. À quelle condition sur α y a-t-il glissement ?
2. Montrer que si α est tel que $\tan\alpha > \dfrac{\ell}{h}$, le bloc bascule sans glisser.

   On notera que cette question s'apparente à une résolution de problème et nécessite une rédaction claire et détaillée.
3. En déduire la condition sur les dimensions du bloc telle que celui-ci glisse sans avoir préalablement basculé quelle que soit la surface sur laquelle il est posé.

   Application numérique : quelle est la longueur minimale d'un bloc d'un mètre de haut avec $f_s = 0{,}5$ pour qu'il glisse sans avoir préalablement basculé ?

3 Mécanique terrestre

Données :

La Terre est assimilée à une boule homogène de centre O et de rayon $R = 6{,}38.10^3$ km.
Constante universelle de la gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.S.I.
Masse de la Terre : $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg

Le référentiel géocentrique ($\mathscr{R}_G$) est supposé galiléen et on le munit du repère ($OXYZ$). Par rapport à celui-ci, le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles SN, fixe dans ($\mathscr{R}_G$), avec une vitesse angulaire $\omega = 7{,}29.10^{-5}$ rad.s^{-1}. ($\mathscr{R}_T$) est muni d'un repère ($Axyz$) où A est un point de la surface terrestre situé à la latitude λ (Figure 1). Ax est tangent au parallèle et dirigé vers l'Est, Ay est tangent au méridien et dirigé vers le Nord et Az est vertical et dirigé vers le haut. On désigne par ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) les trois vecteurs unitaires associés aux trois axes Ax, Ay et Az.

Le vecteur rotation de ($\mathscr{R}_T$) par rapport à ($\mathscr{R}_G$) est $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_Z$ où $\vec{u}_Z$ est le vecteur unitaire de OZ.

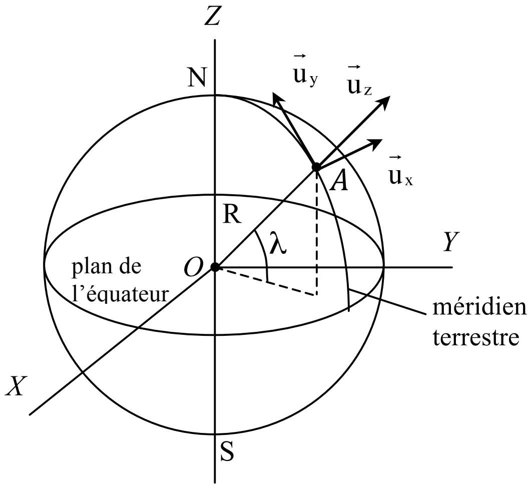


Figure 1

Dans tout le problème, on étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$). Ce point est repéré par ses trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) relativement au repère $(Axyz)$. Le projeté de M sur l'axe de rotation SN sera noté H.

Le point M reste suffisamment proche de la surface terrestre pour que le champ de gravitation terrestre puisse s'écrire en première approximation ($OM \approx R$) :

$$\vec{G}_T = -\,G\,\frac{M_T}{R_T^2}\,\vec{u}_z, \text{ que l'on notera } -g_0\,\vec{u}_z$$

I. Champ de pesanteur terrestre

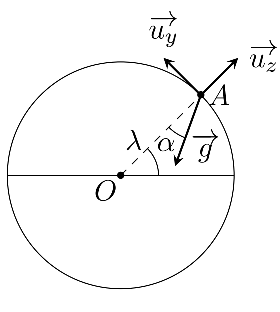
1. Calculs préliminaires.
   a) Montrer que $\vec{v}_{A/\mathscr{R}_G} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$. En déduire que l'accélération du point A dans ($\mathscr{R}_G$) a pour expression : $\vec{a}_{A/\mathscr{R}_G} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA})$.
   b) À partir de la relation générale donnant l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ en un point mobile M, montrer que celle ci peut aussi se mettre sous la forme : $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$.
   c) Montrer alors que $\vec{a}_e$ peut aussi s'écrire : $\vec{a}_e = -\,\omega^2\,\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur l'axe de rotation OZ.
2. Montrer que lorsque le point M est uniquement soumis à la force de gravitation, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans ($\mathscr{R}_T$) :

$$m\,\vec{a}_{M/\mathscr{R}_T} = m\vec{g} - 2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathscr{R}_T} \quad \textbf{(1)}$$

   où $\vec{g}$ est un vecteur que l'on explicitera en fonction de $g_0\,\vec{u}_z$, ω et $\overrightarrow{HM}$.

   Dans la suite, on ne considérera que des points très proches de la surface terrestre, de sorte à pouvoir confondre les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HA}$. La grandeur $\vec{g}$ représente l'accélération de la pesanteur *mesurée dans le référentiel terrestre, au voisinage du point A.*

3. Étude de $\vec{g}$



   a) Expliciter les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de g_0, ω, λ et R.
   b) Soit α l'angle entre $\overrightarrow{AO}$ et $\vec{g}$. Déterminer $\tan\alpha$ en fonction de g_0, ω, λ et R. Application numérique : calculer α à la latitude $\lambda = 45°$ nord.
4. Donner l'expression de $\Delta g = g_{\text{pôle}} - g_{\text{équateur}}$, différence des normes de l'accélération de la pesanteur au pôle et à l'équateur. Calculer la valeur numérique de Δg. En réalité, on mesure $\Delta g = 52.10^{-3}$ m.s^{-2} ; proposer une raison pour expliquer l'écart trouvé.

   Compte tenu des valeurs numériques calculées, on admettra dans toute la suite que les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont $(0, 0, -\,g)$ avec g = 9,8 m.s^{-2}.

II. Déviation vers l'Est

Le phénomène de déviation vers l'Est d'un objet en chute libre dans le référentiel terrestre a été une mise en évidence du caractère non galiléen du référentiel terrestre et de la manifestation de la force de Coriolis.

On étudie dans cette partie le mouvement d'un point M de masse m dans le repère $(Axyz)$ lorsqu'il tombe en chute libre, sans vitesse initiale, à partir du point $B(0, 0, L)$.

5. À partir de l'équation (1) de la question 2., déterminer en fonction de g, ω et λ les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M dans le repère $(Axyz)$.

Comme ω est petite, il est possible d'étudier le phénomène « à l'ordre 1 en ω », c'est à dire en négligeant dans les équations tous les termes proportionnels à ω^n où $n \geqslant 2$.

6. Résoudre dans cette approximation les équations différentielles obtenues à la question précédente en montrant que :

$$x(t) = at^3 \quad y(t) = 0 \quad z(t) = bt^2 + L$$

où a et b sont deux constantes à expliciter en fonction de g, ω et λ.

7. En déduire que dans l'hémisphère Nord la particule tombe sur le sol en étant déviée d'une quantité x_1 vers l'Est. Calculer sa valeur numérique lorsque $L = 200$ m et $\lambda = 45°$.